# Сведения из линейной алгебры, высшей и дискретной математики

## §1. Векторы

### §1.1. Определение вектора

***Вектором*** называется направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указаны начало (наз. также точкой приложения вектора) и конец.



Рисунок 1. Изображение вектора

Длина направленного отрезка, изображающего вектор, называется ***длиной***, или ***модулем***, вектора. Длина вектора обозначается .

***Нуль-вектор*** – вектор, начало и конец которого совпадают, его модуль равен *0*, а направление неопределенное. Обозначается ().

***Ортом***, или единичным вектором, называется вектор, длина которого равна единице.

### §1.2. Координатное представление

Пусть на плоскости задана декартова система координат XOY (рис. 2).



Рисунок 2. Изображение вектора в координатном представлении

Согласно рис. 2, вектор задан парой чисел, составляющих начало координат *(xн, yн)* и парой числе, составляющих конец координат *(xк, yк)*.

Тогда вектор может быть задан двумя числами:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Эти числа *ax* и *ay* в геометрии называют *координатами вектора*, а в физике – проекциями вектора на соответствующие оси координат. Вектор можно записать как:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

При таком определении вектора его модуль

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Чтобы выполнить обратное действие – отобразить вектор в системе координат, необходимо знать систему координат, заданную единичными векторами – ортами.

Пусть на плоскости задана декартова система координат при помощи единичных векторов и :



Рисунок 3. Изображение вектора в системе координат, заданной ортами

Тогда вектор может быть задан следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Очевидно, что:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §1.3. Коллинеарность векторов

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.



Рисунок 4. Коллинеарные вектора

Координаты коллинеарных векторов удовлетворяют соотношению:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §1.4. Равенство векторов

Два вектора называются ***равными***, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.



Рисунок 5. Равные вектора

Все нуль-векторы считаются равными.

Координаты равных векторов удовлетворяют соотношениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §1.5. Ортогональность

Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых или векторы, образующие угол в 90º, называются ***ортогональными***.

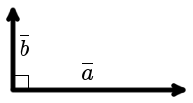


Рисунок 6. Ортогональные векторы

### §1.6. Сумма векторов

***Суммой*** векторов и называют вектор , идущий из начала вектора в конец вектора при условии, что начало вектора приложено к концу вектора (рис. 7а). Если векторы неколлинеарны, то можно воспользоваться правилом параллелограмма (рис. 7б):



а) б)

Рисунок 7. Сумма векторов: а – правило треугольника, б – правило параллелограмма

Координаты вектора суммы двух векторов удовлетворяют соотношениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Построение суммы нескольких векторов наглядно видно из рис. 8, где суммирующий вектор приложен к началу вектора и концу вектора .



Рисунок 8. Пример суммы векторов

### §1.7. Произведение вектора на число

Произведением вектора на число называют вектор, коллинеарный вектору , имеющий длину, равную , и направление, совпадающее с направлением при и противоположное при .

Если взять вектор с противоположным знаком, то получим вектор с противоположным направлением, или вектор, противоположный .

Координаты вектора произведения вектора на число удовлетворяют соотношениям:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В случае вычисления суммы в системе координат, заданной ортами:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §1.8. Свойства действий над векторами

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §1.9. Свойства действий над векторами

***Скалярное произведение*** векторов и (обозначается ) – это скалярная величина, в алгебраической интерпретации равная сумме попарного произведения координат векторов.

## §2. Матрицы

### §2.1. Основные определения и виды матриц

***Матрицей размерности*** m×n называют прямоугольную таблицу из чисел, которые расположены в m строках и n столбцах.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Числа, образующие матрицу называются *элементами матрицы*.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. Например:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья. Например:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Матрицы обозначают большими латинскими буквами: A,B,C...

Существуют матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка *A = (a11, a12,…, a1n)*, называется ***матрицей – строкой*** (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, ***матрицей – столбцом***.

Матрица – строка/столбец также представляет собой *n*-мерный вектор, который может быть записан как: *A = (a1, a2,…, an)*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой*** и обозначается (0), или просто 0. Например:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Главной диагональю квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего в правый нижний угол.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***треугольной*** матрицей:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной*** матрицей:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице поля, а остальные равны нулю, называется ***единичной матрицей***:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §2.2. Равенство матриц

Две матрицы *A* и *B* называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны *aij* = *bij*. Так если

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

то *A=B*, если *a11 = b11, a12 = b12, a21 = b21* и *a22 = b22*.

### §2.3. Транспонирование

Транспонированная матрица — матрица *AT*, полученная из исходной матрицы *A* заменой строк на столбцы:

Если задана следующая матрица

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

то, применив операцию транспонирования, получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Например. Найдем транспонированные матрицы для матриц A и B:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

В результате, получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### §2.4. Сложение матриц

Пусть *A, B* - матрицы одинаковой размерности. Суммой матриц *A* и *B* называется матрица *A + B*, определяемая равенством:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

для всех *i =1,2,...,m* и *j =1,2,...,n*.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Допустимо выполнять операцию сложения только между матрицами одинаковой размерности.

Сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному *A+B=B+A* и ассоциативному (*A+B*)+*C*=*A*+(*B+C*).

### §2.5. Умножение матрицы на число

Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы *A* на число *k* есть новая матрица, которая определяется как:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Для любых чисел *a* и *b* и матриц *A* и *B* выполняются равенства:

1. ;
2. ;
3. .

### §2.6. Умножение матриц

Размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй).

***Произведением*** матрицы *A* не матрицу *B* называется новая матрица *C=AB*, элементы которой составляются следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

В общем случае, если мы умножаем матрицу *A = (aij)* размера *m*×*n* на матрицу *B = (bij)* размера *n*×*p*, то получим матрицу *C* размера *m*×*p*, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент *cij* получается в результате произведения элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B* и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Важно учесть, что *A∙B* ≠ *B∙A*. Поэтому при умножении матриц необходимо следить за порядком множителей.

Умножение матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам, т.е. *(AB)C=A(BC)* и *(A+B)C=AC+BC*.

Легко также проверить, что при умножении квадратной матрицы *A* на единичную матрицу *E* того же порядка вновь получим матрицу *A*, причём *AE=EA=A*.

Произведение 2-х не нулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице, например:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## §3. Пределы

***Предел функции*** в заданной точке *n0* – это такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции *f(n)* при стремлении её аргумента к данной точке *n0*. Предел обозначается как:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где *lim* – символьное обозначение предела, *n* – аргумент функции, который стремится к значению (точке) *n0*.

Предел может стремиться к конкретному числу *n0*, так и к бесконечно большой величине ∞ (*+* ∞), либо бесконечно малой величине *–* ∞.

Предел функции является обобщением понятия предела последовательности. Рассмотрим примеры вычисления пределов простейших функций: числовых последовательностей.

*Числовой последовательностью* называется функция от натурального аргумента, то есть функция, заданная на множестве натуральных чисел . Числовые последовательности принято обозначать следующим образом: . Например,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Последовательность состоит из чисел Если изобразить эти точки на числовой прямой, то видно, что числовая последовательность движется к нулю. Говорят, что её предел равен нулю и записывают

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Аналогично,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Тогда,

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

т.к., действует правило:если под знаком предела стоит дробь, в числителе и знаменателе которой многочлены одинаковых степеней, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Рассмотрим последнюю последовательность:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Соответственно, предел будет равен:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Последовательность, имеющая конечный предел *n0*, называется ***сходящейся***, а не имеющая конечного предела – ***расходящейся***. и – сходящиеся числовые последовательности, – расходящаяся.

## §4. Производные

### §4.1. Основные определения

Если функция *у = f(x)* описывает какой-либо физический процесс, то производная есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Например, если *у = f(t)* – функция, которая описывает зависимость температуры ядерного реактора от времени, в который погрузили охлаждающие поглощающие стержни. Тогда производная от указанной функции, покажет скорость охлаждения ректора.

***Производной функции*** *y = f(x)* в точке *x0* называется предел отношения приращения *∆f* функции в точке *x0* к приращению аргумента *∆x* при *∆x* стремящемся к нулю, если этот предел существует. Производная функции *f(x)* в точке *x0* обозначается *f’(x)*:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Производную функции *y = f(x)* в точке *x* обозначают *f’(x)*, *f’x*.

**Пример 1.** Найдем производную функции *y = C*, *C = const*.

Решение.

Значению *x* даем приращение *Δx*.

Находим значение функции *Δy*:

Значит,

Следовательно,

**Пример 2.** Найдем производную функции *y = x2*.

Решение.

Значению *x* даем приращение *Δx*.

Находим значение функции *Δy*:

Составляем отношение

Находим предела этого отношения

Таким образом, .

*Необходимым условием* существования производной функции в заданной точке является непрерывность функции в этой точке. Функция называется непрерывной в точке , если она определена в окрестности данной точки и

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Обратное утверждение является неверным. Например, функция *f(x) = |x|* непрерывна на промежутке (*–* ∞; +∞), но в точке *x0 = 0* производной не имеет.

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***. Функция, имеющая производную в точке , называется ***дифференцируемой в этой точке***. Функция, имеющая производную в каждой точке интервала *(a, b)*, называется *дифференцируемой на этом интервале*.

Для упрощения вычисления производных используются правила дифференцирования и таблица производных.

### §4.2. Таблица производных

|  |  |
| --- | --- |
| ;  ;  ;  ;  ;  ;  ;  ; | ;  ;  ;  ;  ;  ; |

### §4.3. Правила дифференцирования

1. *Постоянный множитель* можно выносить за знак производной:
2. Производная *суммы (разности)* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, равна сумме (разности) производных этих функций:
3. Производная *произведения* двух функций, определённых на одном и том же промежутке, вычисляется по формуле
4. Если функции *f(x)* и *g(x)* имеют в точке *x* производные и g(x) ≠ 0, то в этой точке существует производная их *частного*, которая вычисляется по формуле
5. Если функция *сложная*, то есть *e = f(y)*, где *y = g(x)*, то её производная может быть вычислена по правилу

### §4.4. Производные высших порядков

***Производной второго порядка*** (второй производной) функции *y = f(x)* называется производная от её первой производной, то есть предел

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

если он существует.

Аналогично производную от второй производной называют ***производной третьего порядка*** или третьей производной.

В общем случае ***производной -го порядка*** называется производная от производной *(n – 1)* порядка: .

Производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляются последовательным дифференцированием заданной функции.

### §4.5. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных *z = f(x, y)*. Выберем в области определения произвольную точку *(x, y)* и зафиксируем ее. Дадим сначала первой переменной *x* точке приращение *Δx* и образуем новую точку – *(x + Δx, y)*. Вычислим приращение функции:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Такое приращение называется частным приращением по переменной *x*. Составим отношение приращений (0.44) к приращению аргумента . Если существует предел этого отношения при *Δx→0*, то этот предел называется ***частной производной*** числовой функции двух переменных по *x* и обозначается

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Следует отметить, что в отличие от производной функции одной переменной, выражение не отношение дифференциалов, а единый слитный символ.

**Пример 1.** Найдем частную производную по переменной *x* для следующей функции от двух переменных:

Тогда получим,

**Пример 2.** Найдем частную производную по переменной *w* для следующей функции:

В результате, получим:

### §4.6. Градиент

Вектор с координатами *f'x(x0,y0)*, *f'y(x0,y0)*, называется ***градиентом функции*** *z = f(x, y)* в точке *M0(x0, y0)* и обозначается

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

или

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Градиент дифференцируемой функции *z = f(x, y)* в точке *M0(x0, y0)* определяет направление, в котором функция в этой точке возрастает с наибольшей скоростью. При этом его модуль равен наибольшей скорости изменения функции в точке *M0*.

Для функции *n* переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.

## §5. Ряд Тейлора

Рядом Тейлора называется степенной ряд вида:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

## §6. Поверхности и n-мерные пространства

Точка (1-мерная плоскость) в пространстве задается следующим уравнение:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Уравнение прямой (2-мерной плоскости) имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Уравнение 3-мерной плоскости задается как:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Для того чтобы изобразить трехмерную плоскость в пространстве, по ее уравнению необходимо найти точки её пересечения с осями координат. Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью Ox, надо в уравнении плоскости принять все остальные переменные равными 0:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Так, для нахождения точки пересечения гиперплоскости с осью *Oy* и осью *Oz*, соответственно:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

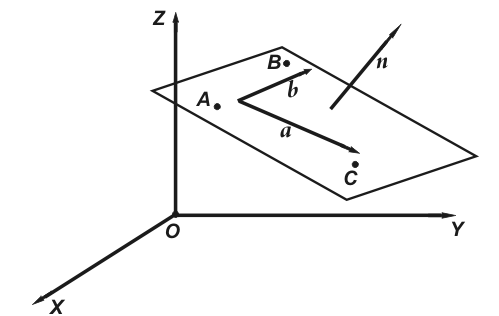


Рисунок 9. Изображение 2-мерной плоскости в пространстве

Плоскость может быть также *n*-мерной. Такая плоскость задается уравнением:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Принцип построения гиперплоскости аналогичен построению 3-мерной плоскости.

## §7. Булевы функции

В классической математике приняты такие операции как сложение, умножение, вычитание и деление. Аналогично в дискретной математике существуют элементарные булевы функции.

Булевы функции образуют самый простой нетривиальный класс дискретных функций - их аргументы и значения могут принимать всего два значения 0 или 1.

Теория распознавания образов изначально строилась на моделировании принципов мышления и работы головного мозга посредством логических функций – булевых функций. В настоящее время булевы функции находят применение в логике, цифровой электронике, в программировании, и во многих других областях науки и техники.

Рассмотрим основные функции, используемые в качестве элементарных функций в алгебре логики.

***Функции одной переменной*** – функции, зависящие только от одного аргумента.

Всего существует четыре различные функции от одной переменной (табл. 1):

* *f(x) = 0* – тождественный ноль;
* *f(x) = 1* – тождественная единица;
* *f(x) = x* – тождественная функция или тождественный *x*;
* *f(x) = ┐x* – отрицание *x*, логическое "НЕ", также обозначается как .

В табл. 1 в первом столбце заданы возможные входные значения, а в остальных столбцах указаны функции и их соответствующие выходные значения.

Таблица 1. Булевы функции от одной переменной

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | ***0*** | ***1*** | ***x*** | ***┐x*** |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

***Функции двух переменных*** – функции, зависящие от двух аргументов.

В первом столбике табл. 2 записаны всевозможные выходные наборы *x, y* или комбинации 0 и 1. В первом наборе оба аргумента равны 0, но потом *x = 0*, а *х = 1*, в третьем наоборот *x = 1*, а *y = 0* и в четвертом *x = y = 1*. В последующих столбцах обозначены конкретные функции и их выходных значения на каждом из входных наборов *x* и *y*.

Таблица 2. Булевы функции от двух переменных

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***x*** | ***y*** | ***x ˅ y*** | ***x ˄ y*** | ***x*** ⊕ ***y*** | ***x → y*** | ***x ≡ y*** | ***x │ y*** | ***x ↓ y*** |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

* *f(x, y) = x* ***˅*** *y* – дизъюнкция, логическое "ИЛИ".
* *f(x, y) = x* ***˄*** *y* – конъюнкция, логическое "И", логическое умножение.
* Также можно использовать обозначения *x & y* или *xy*.
* *f(x, y) =x* ⊕ *y* – сложение по модулю два, логическое исключающее
* "ИЛИ". Также можно использовать обозначение *x + y*.
* *f(x, y) = x* ***→*** *y* – импликация, "если, то". Также можно использовать
* обозначение x y.
* *f(x, y) = x* ***≡*** *y* – эквивалентность. Также можно использовать
* обозначение *x ~ y*.
* *f(x, y) =x* ***│*** *y* – штрих Шеффера, логическое «И-НЕ».
* *f(x, y) =x* ***↓*** *y* – стрелка Пирса, логическое «ИЛИ-НЕ»

Булеву функцию бывают от любого n-го количества переменных. Опираясь на таблицы 1 и 2 можно построить такие функции, например:

Пусть задана булева функция:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

При значениях *x = 0*, *y = 0* и *z = 1*, получим:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Одна функция может иметь множество реализаций различными формулами. Формулы, реализующие одну и ту же функцию, называются *равносильными.* Отношение равносильности формул является эквивалентностью. Имеют место следующие *основные равносильности*:

1)  (идемпотентность конъюнкции);

2)  (идемпотентность дизъюнкции);

3) ; 4) ; 5) ; 6) ;

7)  (закон противоречия);

8)  (закон исключенного третьего);

9)  (закон снятия двойного отрицания);

10)  (первый закон поглощения);

11)  (второй закон поглощения);

12) ;

13) ;  (законы де Моргана);

14)  (коммутативность конъюнкции);

15)  (коммутативность дизъюнкции);

16)  (ассоциативность конъюнкции);

17)  (ассоциативность дизъюнкции);

18)  (дистрибутивность конъюнкции относи­тельно дизъюнкции);

19)  (дистрибутивность дизъюнкции относи­тельно конъюнкции).

20) *x* | *y= *; *x* ↓ *y*=.